1r QUADRIMESTRE

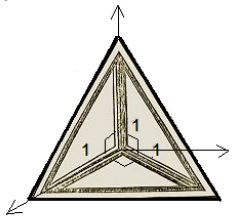
Examen 29 de gener de 2010 :: Resolució

1. (2 punts) Donada una aplicació lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $(-1,1,1) \in \text{Ker } f$, $f(1,1,0) = (2,0)$ i $f(0,-1,0) = (0,1)$.

(a) Troba la matriu associada a f en les bases canòniques de $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}^2$.

(b) Calcula una base i la dimensió del nucli i la imatge de f.

(c) Troba la imatge del tetràedre regular de la figura.



(a) Com que $\{(-1,1,1),(1,1,0),(0,-1,0)\}$ són L.I. i n'hi ha tants com la dimensió de $\mathbb{R}^3$, $N = \{(-1,1,1),(1,1,0),(0,-1,0)\}$ és base de $\mathbb{R}^3$. D'aquesta manera,

$$F_{Ne_2} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C_{Ne_3} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Com que ens demanen $F_{e_3e_2}$ cal efectuar el següent canvi de base:

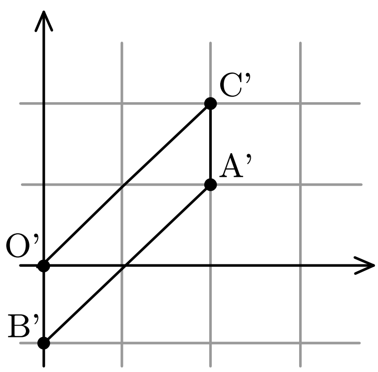
$$F_{e_3e_2} = C_{e_2e_2} \cdot F_{Ne_2} \cdot C_{e_3N} = F_{Ne_2} \cdot C_{e_3N} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) Com que $\text{rang}(F_{e_3e_2}) = 2 = \dim \text{Im } f = \dim \mathbb{R}^2$, llavors $\text{Im } f = \mathbb{R}^2$ i per tant, la base canònica e_2 és per exemple una base d'Im f.
Pel Teorema Fonamental de Dimensions, $3 = 2 + \dim \text{Ker } f$, de manera que $\dim \text{Ker } f = 1$ i $\{(-1,1,1)\}$ n'és base.

(c) El tetràedre té per vèrtexs els punts $O = (0,0,0)$, $A = (1,0,0)$, $B = (0,1,0)$, $C = (0,0,1)$. Calculem les imatges fent servir la matriu calculada a l'apartat (a):

$$\begin{cases} O' = f(0,0,0) = (0,0) \\ A' = f(1,0,0) = (2,1) \\ B' = f(0,1,0) = (0,-1) \\ C' = f(0,0,1) = (2,2) \end{cases}$$



2. (2 punts) A l'espai euclidià $\mathbb{R}^2$ es considera la base ortonormal $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ i els vectors $\vec{u}, \vec{v}$ tals que $\vec{u}_B = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $\vec{v}_B = (2, 0)$.

(a) Justifica l'existència d'un gir f tal que $f(\vec{u}) = \vec{v}$.

(b) Troba la matriu associada a f en la base B.

(c) Troba la matriu associada a f en la base $\{\vec{u}, \vec{v}\}$.

(a) Calculem les normes de $\vec{u}$ i $\vec{v}$ (la matriu de la mètrica és la Identitat perquè B és ortonormal):

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}} = \sqrt{2+2} = 2$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}} = \sqrt{4+0} = 2$$

D'aquesta manera podem concloure que $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$. Un gir és un cas particular de transformació ortogonal, i una transformació ortogonal conserva les normes dels vectors. Per tant, existeix un gir f que gira el vector $\vec{u}$ i el fa coincidir amb $\vec{v}$. L'angle del gir és l'angle que formen els dos vectors:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}}{4} = \frac{-2\sqrt{2}}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Longrightarrow \quad \alpha = 135^\circ, 225^\circ$$

Per tal com són els vectors, l'angle que agafarem és 225°.

(b) Com que B és ortonormal, directament,

$$F_B = \begin{pmatrix} \cos 225^\circ & -\sin 225^\circ \\ \sin 225^\circ & \cos 225^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

(c) Fem el canvi de base de B a $N = \{\vec{u}_B = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}), \vec{v}_B = (2, 0)\}$:

$$F_N = C_{BN} \cdot F_B \cdot C_{NB} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 2 \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot C_{NB} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot C_{NB} =$$

$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 2 \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & -4\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

3. (2 punts) Donada la cònica $x^2 - y^2 + 2xy - 6x + 4y - 3 = 0$.

(a) Calcula els valors i vectors propis de la part quadràtica.
(b) Diagonalitza la cònica pel mètode de diagonalització ortogonal i classifica-la.
(c) Quin canvi hem d'aplicar per centrar la cònica a l'origen de coordenades?

(a) Reescrivint la cònica en forma matricial,

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 3 = 0$$

Calculem el polinomi característic de la matriu A de la part quadràtica:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda) - 1 = -1 + \lambda^2 - 1 = \lambda^2 - 2$$

Per tant, els vaps són $-\sqrt{2}, \sqrt{2}$. Calculem els veps:

$\mathrm{Ker}(A - \sqrt{2}Id)$:

$$\begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} & 1 \\ 1 & -1-\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} (1-\sqrt{2})x + y = 0 \\ x - (1+\sqrt{2})y = 0 \end{cases} \implies x = (1+\sqrt{2})y, \ \forall y \in \mathbb{R}$$

$\mathrm{Ker}(A + \sqrt{2}Id)$:

$$\begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 1 \\ 1 & -1+\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} (1+\sqrt{2})x + y = 0 \\ x - (1-\sqrt{2})y = 0 \end{cases} \implies y = -(1+\sqrt{2})x, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Per tant, $\mathrm{Ker}(A - \sqrt{2}Id) =< (1+\sqrt{2}, 1) >$ i $\mathrm{Ker}(A + \sqrt{2}Id) =< (1, -1-\sqrt{2}) >$.

(b) Normalitzem els veps trobats a l'apartat anterior sabent que $\|(1+\sqrt{2}, 1)\| = \|(1, -1-\sqrt{2})\| = \sqrt{4+2\sqrt{2}}$ i muntem la matriu de rotació:

$$C_{Ne} = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 1 \\ 1 & -1-\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Aplicant la rotació,

$$\begin{aligned} \sqrt{2}x^2 - \sqrt{2}y^2 + \begin{pmatrix} -6 & 4 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 1 \\ 1 & -1-\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 3 &= \\ = \sqrt{2}x^2 - \sqrt{2}y^2 + \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \begin{pmatrix} -2-6\sqrt{2} & -10-4\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 3 &= \\ = \sqrt{2}x^2 - \sqrt{2}y^2 - \frac{2+6\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}x - \frac{10+4\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}y - 3 &= 0 \end{aligned}$$

Plantejant els canvis de Lagrange per eliminar els termes lineals,

$$x = x + \frac{1+3\sqrt{2}}{2\sqrt{2+\sqrt{2}}} \qquad\qquad y = y - \frac{5+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

i aplicant-los,

$$\sqrt{2}\left(x + \frac{1+3\sqrt{2}}{2\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right)^2 - \sqrt{2}\left(y - \frac{5+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right)^2 - \frac{2+6\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}\left(x + \frac{1+3\sqrt{2}}{2\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right) - \frac{10+4\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}\left(y - \frac{5+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right) - 3 =$$

$$= \sqrt{2}x^2 - \sqrt{2}y^2 + \frac{7}{2} - 3 = \sqrt{2}x^2 - \sqrt{2}y^2 + \frac{1}{2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad -2\sqrt{2}x^2 + 2\sqrt{2}y^2 = 1$$

que és una hipèrbola amb els vèrtexs sobre l'eix y i de semieixos $1/\sqrt{2\sqrt{2}}$ (els dos iguals).

(c) Aquest canvi és la translació que fem segons els termes de Lagrange:

$$x = x + \frac{1+3\sqrt{2}}{2\sqrt{2+\sqrt{2}}} \qquad\qquad y = y - \frac{5+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

4. (2 punts) Sigui $\Pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 2x - y + 3z = 0\}$ un pla, r la recta que passa pels punts $P = (1,1,1)$ i $Q = (0,-1,1)$ a l'espai vectorial euclidià amb producte escalar amb matriu associada A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Troba la projecció ortogonal dels punts P i Q sobre Π.

(b) Troba la projecció ortogonal de qualsevol altre punt de la recta r sobre Π.

(c) Demostra que la projecció de la recta r sobre el pla Π és una altra recta.

(a) Resolent l'equació, $y = 2x+3z \ \forall x, z \in \mathbb{R}$ i per tant, $\forall (x,y,z) \in \Pi$, $(x,y,z) = (x, 2x+3z, z) = x(1,2,0)+z(0,3,1)$, de manera que $\{(1,2,0),(0,3,1)\}$ són generadors de Π. Com que també són L.I., formen base de Π.
Per calcular $\Pi^\perp$ imposarem que un vector genèric (x,y,z) sigui ortogonal als dos de la base de Π calculats a l'apartat anterior:

$$0 = (x,y,z)\cdot(1,2,0) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 3x + 5y - 2z$$

$$0 = (x,y,z)\cdot(0,3,1) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 3x + 5y - z$$

Resolent les dues equacions, $y = -3x/5$, $z = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, de manera que $(x,y,z) = (x,-3x/5,0) = x(1,-3/5,0)$. Una base de $\Pi^\perp$ és per exemple $\{(5,-3,0)\}$.
Calculem la projecció ortogonal de P sobre $\Pi^\perp$:

$$P_{\Pi^\perp}(P) = \frac{(1,1,1)\cdot(5,-3,0)}{(5,-3,0)\cdot(5,-3,0)}(5,-3,0) = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}}(5,-3,0) = \frac{4}{13}(5,-3,0)$$

I finalment,

$$P_\Pi(P) = P - P_{\Pi^\perp}(P) = (1,1,1) - \frac{4}{13}(5,-3,0) = \frac{1}{13}(-7,25,13)$$

Calculem la projecció ortogonal de Q sobre $\Pi^\perp$:

$$P_{\Pi^\perp}(Q) = \frac{(0,-1,1)\cdot(5,-3,0)}{(5,-3,0)\cdot(5,-3,0)}(5,-3,0) = \frac{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}}(5,-3,0) = \frac{4}{13}(5,-3,0)$$

I finalment,

$$P_\Pi(Q) = Q - P_{\Pi^\perp}(Q) = (0,-1,1) - \frac{4}{13}(5,-3,0) = \frac{1}{13}(-20,-1,13)$$

(b) L'expressió d'un punt qualsevol de la recta l'obtenim a partir d'un punt qualsevol de la recta i un vector director. Per exemple, prenent com a punt el P, $(x,y,z) = (1,1,1) + \lambda \vec{QP} = (1,1,1) + \lambda(1,2,0) = (1+\lambda, 1+2\lambda, 1)$. Calculem la projecció d'aquest punt seguint el procediment anterior. Primer calculem la projecció ortogonal de $(1+\lambda, 1+2\lambda, 1)$ sobre $\Pi^{\perp}$:

$$P_{\Pi^{\perp}}((1+\lambda, 1+2\lambda, 1)) = \frac{(1+\lambda, 1+2\lambda, 1)\cdot(5,-3,0)}{(5,-3,0)\cdot(5,-3,0)}(5,-3,0) = \frac{\begin{pmatrix} 1+\lambda & 1+2\lambda & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}}(5,-3,0) =$$

$$= \frac{4}{13}(5,-3,0)$$

I finalment,

$$P_{\Pi}(1+\lambda, 1+2\lambda, 1) = (1+\lambda, 1+2\lambda, 1) - P_{\Pi^{\perp}}(1+\lambda, 1+2\lambda, 1) = (1+\lambda, 1+2\lambda, 1) - \frac{4}{13}(5,-3,0) =$$

$$= \frac{1}{13}(-7+13\lambda, 25+26\lambda, 13), \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

(c) Recuperant el resultat final de l'apartat anterior, si $X = (1+\lambda, 1+2\lambda, 1)$ és un punt qualsevol de la recta r,

$$P_{\Pi}(X) = \frac{1}{13}(-7+13\lambda, 25+26\lambda, 13) = \frac{1}{13}(-7,25,13) + \lambda(1,2,0) \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

que és l'equació d'una recta.

5. (2 punts) Defineix AQUÍ què és una forma bilineal. Justifica que mentre que hi ha infinites formes bilineals associades a auna forma quadràtica donada, només una forma bilineal té la mateixa matriu associada que la quadràtica.

Una forma bilineal $f : E \times F \longrightarrow \mathbb{R}$ és una aplicació que transforma dos vectors en un real, de manera que es verifica la linealitat per a cada vector:

$$\begin{array}{ll} 1)\forall\lambda \in \mathbb{R},\ \forall\vec{x},\vec{z} \in E,\ \forall\vec{y} \in F & f(\lambda\vec{x}+\vec{z},\vec{y}) = \lambda f(\vec{x},\vec{y}) + f(\vec{z},\vec{y}) \\ 2)\forall\lambda \in \mathbb{R},\ \forall\vec{x} \in E,\ \forall\vec{y},\vec{z} \in F & f(\vec{x},\lambda\vec{y}+\vec{z}) = \lambda f(\vec{x},\vec{y}) + f(\vec{x},\vec{z}) \end{array}$$

Hi ha infinites formes bilineals que associades a una mateixa forma quadràtica q. Totes elles tenen en comú a la matriu associada dues coses:

1.- Els elements de la diagonal són tots iguals.
2.- Els elements que hi ha a banda i banda de la diagonal sumen el mateix.

Però de totes aquestes formes bilineals només n'hi ha una que és simètrica, que s'anomena **forma polar**. Aquesta bilineal té per matriu associada la mateixa que la quadràtica.