



1. (2.5 punts) Sigui f un endomorfisme de \mathbb{R}^3 tal que $\text{Ker } f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + 2z = 0\}$ i $f(1, 0, 0) = (1, 0, 1)$.

(a) Troba la matriu associada a f en bases canòniques.

(b) Classifica l'endomorfisme.

(a) Busquem primer que res una base de $\text{Ker } f$: $x = y - 2z$, $\forall y, z \in \mathbb{R}$, per tant $(x, y, z) = (y - 2z, y, z) = y(1, 1, 0) + z(-2, 0, 1)$ i llavors $\{(1, 1, 0), (-2, 0, 1)\}$ són generadors de $\text{Ker } f$. Com que també són L.I., formen base de $\text{Ker } f$.

Com que $\{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (-2, 0, 1)\}$ són L.I. i n'hi ha tants com la dimensió de \mathbb{R}^3 , $N = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (-2, 0, 1)\}$ és base de \mathbb{R}^3 . D'aquesta manera,

$$F_{Ne} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C_{Ne} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Com que ens demanen F_{ee} cal efectuar el següent canvi de base:

$$\begin{aligned} F_{ee} &= C_{ee} \cdot F_{Ne} \cdot C_{eN} = F_{Ne} \cdot C_{eN} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(b) Com que $\text{rang}(F_{ee}) = 1 = \dim \text{Im } f \neq \dim \mathbb{R}^3$, llavors f no és exhaustiva.

Com que $\dim \text{Ker } f = 2 \neq 0$ aleshores $\text{Ker } f \neq \{\vec{0}\}$ i f no és injectiva.

Com que f no és injectiva (o com que no és exhaustiva), tampoc és bijectiva.



2. (2.5 punts) Donada la quàdrica $4x^2 + 4z^2 - 8xz - y^2 - 4y - z - 4 = 0$,

- (a) Classifica la cònica resultant de tallar la quàdrica anterior amb el pla $z = x$.
- (b) Classifica la cònica resultant de tallar la quàdrica anterior amb el pla $z = 1$.
- (c) Segons els resultats dels apartats anteriors i sense diagonalitzar la quàdrica, classifica-la.

(a) Substituint $z = x$ a l'equació,

$$-y^2 - 4y - x - 4 = 0$$

Treient els termes lineals per Lagrange amb el canvi $y = y - 2$,

$$0 = -(y - 2)^2 - 4(y - 2) - x - 4 = -y^2 + 4y - 4 - 4y + 8 - x - 4 = -y^2 - x$$

Per tant tenim $x = -y^2$, que és una paràbola.

(b) Substituint $z = 1$ a l'equació,

$$4x^2 - 8x - y^2 - 4y - 1 = 0$$

Treient els termes lineals per Lagrange amb els canvis $x = x + 1$ i $y = y - 2$,

$$0 = 4(x + 1)^2 - 8(x + 1) - (y - 2)^2 - 4(y - 2) - 1 = 4x^2 + 8x + 4 - 8x - 1 - y^2 + 4y - 4 - 4y + 8 - 1 = 4x^2 - y^2 - 1$$

Per tant tenim $4x^2 - y^2 = 1$, que és una hipèrbola.

(c) La secció respecte un pla horitzontal és una hipèrbola, i respecte d'un pla inclinat 45° que conté l'eix X és una paràbola amb vèrtex a l'origen de coordenades. Això correspon a un paraboloides hiperbòlic.



3. (2.5 punts) Volem diagonalitzar l'endomorfisme de \mathbb{R}^3 que en bases canòniques té la matriu associada A .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

- (a) Calcula els valors propis.
 (b) Calcula els vectors propis corresponents a cada valor propi.
 (c) Diagonalitza? Per què?
 (d) Si diagonalitza, escriu la descomposició d' A com un producte de matrius de canvi de base i la matriu diagonal.

(a) Calculant el polinomi característic,

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 6 & -1-\lambda & 0 \\ -1 & -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda)^2 - 12 + (-1-\lambda) - 12(-1-\lambda) = (1-\lambda)(1+2\lambda+\lambda^2) + 11\lambda - 1 =$$

$$= 1 + 2\lambda + \lambda^2 - \lambda - 2\lambda^2 - \lambda^3 + 11\lambda - 1 = (-\lambda)(\lambda^2 + \lambda - 12) = (0-\lambda)(3-\lambda)(-4-\lambda)$$

i els vaps són 0, 3 i -4.

(b) Per a cada vap calculem el vep corresponent:

$Ker(f - 0Id)$:	$Ker(f - 3Id)$	$Ker(f + 4Id)$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 6 & -4 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 6x - y = 0 \\ -x - 2y - z = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} -2x + 2y + z = 0 \\ 6x - 4y = 0 \\ -x - 2y - 4z = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} 5x + 2y + z = 0 \\ 6x + 3y = 0 \\ -x - 2y + 3z = 0 \end{cases}$
$(x, y, z) = (x, 6x, -13x)$	$(x, y, z) = (x, 3x/2, -x)$	$(x, y, z) = (x, -2x, -x)$
$Ker(f - 0Id) = \langle (1, 6, -13) \rangle$	$Ker(f - 3Id) = \langle (2, 3, -2) \rangle$	$Ker(f + 4Id) = \langle (1, -2, -1) \rangle$

(c) Sí que diagonalitza ja que els vaps són tots diferents entre si.

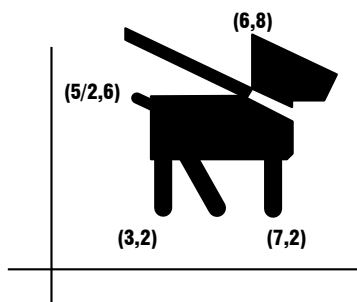
(d) Aquesta relació és el canvi de base. Anomenant S a la matriu de canvi de base de $N = \{(1, 6, -13), (2, 3, -2), (1, -2, -1)\}$ a la canònica i considerant D com la matriu diagonal,

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & -2 \\ -13 & -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

el canvi de base és $A = S \cdot D \cdot S^{-1}$.



4. (2.5 punts) A \mathbb{R}^2 ,
- (a) Calcula la matriu de gir g d'angle $8\pi/3$.
- (b) Calcula la matriu de simetria s respecte de la recta $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$.
- (c) Dibuixa la imatge de la figura per la composició $g \circ s$.



- (a) Tenint en compte que $8\pi/3 = 2\pi + 2\pi/3$, considerarem l'angle $2\pi/3$. La matriu associada en base canònica és, directament,

$$G_e = \begin{pmatrix} \cos(2\pi/3) & -\sin(2\pi/3) \\ \sin(2\pi/3) & \cos(2\pi/3) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$$

- (b) Sabem per teoria que existeix una base ortonormal $N = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ tal que

$$S_N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcularem ara la base N . Considerant r l'eix de simetria, $r = \langle (\sqrt{3}, 1) \rangle$, on $\frac{1}{2}(\sqrt{3}, 1)$ n'és un vector unitari, i per tant prenem $\vec{u}_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{3}, 1)$.

Busquem ara un vector ortogonal a \vec{u}_1 com per exemple $(-1, \sqrt{3})$ i el normalitzem:

$$\vec{u}_2 = \frac{1}{\|(-1, \sqrt{3})\|}(-1, \sqrt{3}) = \frac{1}{2}(-1, \sqrt{3})$$

Finalment apliquem un canvi de base a S_N i trobem la matriu S_e : $S_e = C_{N_e} \cdot S_N \cdot C_{N_e}^T$, sabent que

$$C_{N_e} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Així,

$$\begin{aligned} T_e &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot C_{N_e}^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- (c) Si anomenem $h = g \circ s$, la matriu associada a h és

$$H_e = G_e \cdot S_e = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que és una simetria axial d'eix Y .



Calculant les imatges dels punts representatius de la figura,

$$\begin{aligned}h(5/2, 6) &= (-5/2, 6) \\h(6, 8) &= (-6, 8) \\h(3, 2) &= (-3, 2) \\h(7, 2) &= (-7, 2)\end{aligned}$$

