



1. (2.5 punts) Donada la funció

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x}\right)$$

- (a) Troba el seu domini.
(b) Redefineix-la per tal que sigui contínua a $x = 1$.

(a) Fixem-nos que $1 \notin D(f)$ ja que la seva imatge $\arcsin(0/0)$ no existeix. Tampoc són del domini els negatius, ja que \sqrt{x} no hi està definida. Però a més, la funció arcsinus té el seu propi domini que és $[-1, 1]$. Això vol dir que els punts del domini verificaran també

$$-1 \leq \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x} \leq 1$$

Tenint en compte que $1 - x = (1 + \sqrt{x})(1 - \sqrt{x})$, la condició queda

$$-1 \leq \frac{1}{1 + \sqrt{x}} \leq 1 \implies \begin{cases} -1 - \sqrt{x} \leq 1 \implies \sqrt{x} \geq -2 \\ 1 \leq 1 + \sqrt{x} \implies \sqrt{x} \geq 0 \end{cases}$$

I aquestes desigualtats es verifiquen sempre, de manera que no treiem cap altra condició.

$$D(f) = [0, 1) \cup (1, +\infty)$$

Ara la funció és contínua a $x = 1$ ja que $1 \in D(f)$ i $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1/2$.

(b) Calculem els límits laterals de $f(x)$ quan x tendeix a 1:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \arcsin\left(\frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x}\right) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \arcsin\left(\frac{1}{1 + \sqrt{x}}\right) = \frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \arcsin\left(\frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x}\right) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \arcsin\left(\frac{1}{1 + \sqrt{x}}\right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

I llavors $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{1}{2}$.

Com que $1 \notin D(f)$ tenim una **discontinuitat evitable** i la podem evitar redefinint la funció de la següent manera:

$$f(x) = \begin{cases} \arcsin\left(\frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x}\right) & x \neq 1 \\ \frac{1}{2} & x = 1 \end{cases}$$



2. (2.5 punts) Sigui la polar $r^2 = 4 \cos 2\alpha$.

- (a) Estudia-la i representa-la.
- (b) Troba la seva equació cartesiana.
- (c)

(a) Com que $r = 2\sqrt{\cos 2\alpha}$ només són del domini els valors d' α que fan que el cosinus sigui positiu o zero:

$$\cos 2\alpha \geq 0 \implies -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2\alpha \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \implies -\frac{\pi}{4} + k\pi \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4} + k\pi$$

I per tant $D(r) = [-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi], \forall k \in \mathbb{Z}$.

Mirem les simetries:

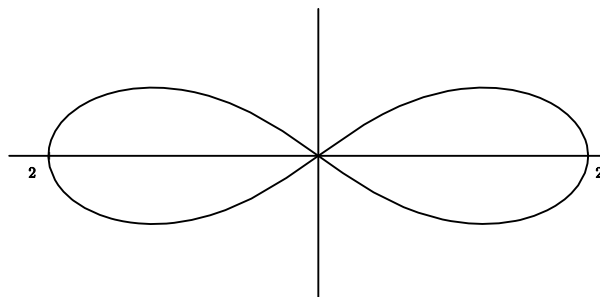
$$r(-\alpha) = 2\sqrt{\cos(-2\alpha)} = 2\sqrt{\cos(2\alpha)} = r(\alpha) \text{ (simetria respecte l'eix } X\text{)}.$$

$$r(\pi - \alpha) = 2\sqrt{\cos(2(\pi - \alpha))} = 2\sqrt{\cos 2\pi \cos 2\alpha - \sin 2\pi \sin(-2\alpha)} = 2\sqrt{\cos 2\alpha} = r(\alpha) \text{ (simetria respecte l'eix } Y\text{)}.$$

A partir d'aquestes dues simetries deduïm que també té simetria respecte de l'origen de coordenades.

Donant uns quants valors i tenint en compte les simetries anteriors i el domini,

α	r
0	2
30°	$\sqrt{2}$
45°	0



(b) Recordant que $x = r \cos \alpha, y = r \sin \alpha$ i $r^2 = x^2 + y^2$,

$$\begin{aligned} r^2 = 4 \cos 2\alpha &\implies x^2 + y^2 = 4(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = 4\left(\frac{x^2}{r^2} - \frac{y^2}{r^2}\right) \\ &\implies (x^2 + y^2)^2 = 4(x^2 - y^2) \end{aligned}$$

(c) Fem



3. (2.5 punts) Resol la integral $\int \cos^2 x dx$,

- (a) Usant el mètode d'integració per parts.
- (b) Usant fórmules trigonomètriques.
- (c) Si la volem resoldre per canvi de variable, quin canvi usaries? Per què? (NO ho calculis)

(a) Separant el cosinus en dos i considerant $u = \cos x$ i $dv = \cos x dx$,

$$\begin{aligned}\int \cos^2 x dx &= \int \cos x \cos x dx = \cos x \sin x - \int \cos x (-\sin x) dx = \cos x \sin x + \int \sin^2 x dx = \\ &= \cos x \sin x + \int (1 - \cos^2 x) dx = \cos x \sin x + x - \int \cos^2 x dx \\ \implies 2 \int \cos^2 x dx &= \cos x \sin x + x \\ \implies \int \cos^2 x dx &= \frac{1}{2}(\cos x \sin x + x) + C\end{aligned}$$

(b) Tenint en compte que $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$,

$$\int \cos^2 x dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C$$

(c) Com que $\cos^2 x$ és una funció parella en cosinus el canvi que podem fer és $t = \tan x$, de manera que

$$\int \cos^2 x dx = \int \frac{1}{1+t^2} \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{1}{(1+t^2)^2} dt$$



4. (2.5 punts) Diem que dues quantitats estan en proporció àurea ϕ si i només si $a + b$ és a a com a és a b . Expressat algebràicament,

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \phi$$

Per tant $\phi^2 - \phi - 1 = 0$. Resolent l'equació obtenim $\phi = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$. Usant diferents propietats, es pot obtenir la relació

$$\cos \frac{\pi}{5} = \frac{\phi}{2}$$

(a) Proposa dues funcions diferents que permetin calcular aproximadament el valor de ϕ usant el polinomi aproximador de Taylor.

(b) Calcula una aproximació de ϕ usant els tres primers termes del desenvolupament de Taylor d'una de les funcions anteriors (deixa el resultat en funció de π).

(c) Estima l'error comès (deixa el resultat en funció de π).

(a) Una funció podria ser $f(x) = \cos(x)$, de manera que $\phi = 2f(\pi/5)$. També podríem agafar $f(x) = 2 \cos x$ i llavors $\phi = f(\pi/5)$ (o fins i tot $f(x) = 2/\sec(x)$ i $\phi = f(\pi/5)$).

(b) Prendrem $f(x) = 2 \cos x$ i calcularem el polinomi de Taylor al voltant de $a = 0$. Calculant les 2 primeres derivades,

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2 \sin x \\ f''(x) &= -2 \cos x \end{aligned}$$

De manera que el polinomi és

$$p(x) = f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 = 2 \cos(0) - 2 \sin(0)x - \frac{2 \cos(0)}{2}x^2 = 2 - x^2$$

I per tant,

$$\phi \approx 2 - \frac{\pi^2}{25}$$

(c) L'error el trobem, en principi, avaluant el següent terme del polinomi de Taylor en $x = \pi/5$. Però com que $f'''(x) = 2 \sin x$ i $f'''(0) = 0$ prendrem el següent terme:

$$E \approx \left| \frac{f^{(iv)}(0)(x-0)^4}{4!} \right|_{x=\pi/5} = \left| \frac{2 \cos(0)x^4}{24} \right|_{x=\pi/5} = \frac{2\pi^4}{24 \cdot 625} = \frac{\pi^4}{7500}$$