1. (1.5 punts)

(a) Defineix AQUÍ què és un infinitèssim.
(b) Calcula sense usar L'Hôpital el límit

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$$

(a) Diem que $f(x)$ és un **infinitèssim a** $x=a$ si $\lim_{x\to a} f(x)=0$.

(b) Fent primer el límit lateral per l'esquerra i aplicant infinitèssims a $\sin x$ i a $1-\cos x$,

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0^-}\sin x\,\frac{\frac{1}{\cos x}-1}{x^3}=\lim_{x\to 0^-}x\,\frac{\frac{1}{\cos x}-1}{x^3}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1-\cos x}{x^2\cos x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2}{2x^2\cos x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{2\cos x}=\frac{1}{2}$$

El límit per la dreta a 0^+ queda igual i per tant el límit val $1/2$.

2. (1.5 punts) Siguin $y = f(x) = 1 - x^2$ i $y = g(x) = 1 - |x|$,

(a) Calcula l'àrea de la regió limitada per les corbes $y = f(x)$ i $y = g(x)$.
(b) Planteja les integrals per a poder calcular el volum de revolució al girar la figura limitada per les dues corbes $y = f(x)$ i $y = g(x)$,

(b1) respecte de l'eix OX.
(b2) respecte de l'eix OY.
(b3) respecte de la recta $y = 2$.

(a) Plantegem primer com queda la funció $g(x)$:

$$g(x) = \begin{cases} 1 - x & x \geq 0 \\ 1 + x & x < 0 \end{cases}$$

Si busquem la intersecció de les dues corbes ho haurem de fer considerant per separat els casos $x \geq 0$ i $x < 0$:

$x \leq 0$: $1 - x^2 = 1 - x$, per tant $x = 0$ i $x = 1$
$x < 0$: $1 - x^2 = 1 + x$, per tant $x = 0$ i $x = -1$

Així, els punts de tall són $(-1, 0)$, $(0, 1)$ i $(1, 0)$. Com que les dues funcions són parelles tenen simetria respecte de l'eix OY, de manera que l'àrea també. Aleshores, només considerant la part positiva i duplicant-la,

$$A = 2\int_0^1 (1 - x^2) - (1 - x)dx = 2\int_0^1 (x - x^2)dx = 2\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - 0 + 0\right) = \frac{1}{3}$$

(b)

(b1) Aprofitant la simetria parella de les dues funcions (i per tant, del volum de revolució),

$$V = 2\pi\int_0^1 (1 - x^2)^2 dx - 2\pi\int_0^1 (1 - x)^2 dx$$

(b2) Posant x en funció de y per poder integrar,

$$V = \pi\int_0^1 (\sqrt{1 - y})^2 dy - \pi\int_0^1 (1 - y)^2 dy$$

(b3) Com que de $(0, 1)$ a la recta $y = 2$ hi ha la mateixa distància que de $(0, 1)$ a la recta $y = 0$, podem considerar les corbes simètriques respecte de la recta $y = 1$ (que són $1 + x^2$ i $1 + x$ per a $x \geq 0$) i revolucionar la figura compresa entre les dues corbes al voltant de l'eix OX:

$$V = 2\pi\int_0^1 (1 + x)^2 dx - 2\pi\int_0^1 (1 + x^2)^2 dx$$

3. (2 punts) Si tenim les següents funcions:

$$g(x) = \begin{cases} \sec(\pi x) & x \leq -1 \\ \ln(x^2) & -1 < x < 1 \\ \frac{x^2-x-1}{x+1} & 1 \leq x \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} x & x \leq -2 \\ 4x & -2 < x < 2 \\ e^x & 2 \leq x \end{cases}$$

(a) Estudia la continuïtat de $g(x)$.
(b) Troba les asímptotes de $g(x)$.
(c) Estudia la concavitat i convexitat de $g(x)$.
(d) Calcula $(g \circ f)(x)$ i estudia la seva continuïtat en els punts $x = -2$ i $x = 2$.

(a) Analitzant el primer tram, els punts del tipus $x = \frac{1}{2} + k$, $\forall k \in \mathbb{Z}$ (amb $k \leq -2$) no són del domini de $g(x)$, per tant són punts on $g(x)$ no és contínua. El segon tram és continu excepte al $x = 0$, que no és del domini. El tercer tram és continu perquè no té cap problema de domini. Analitzem amb detall què passa als punts $x = -1$ i $x = 1$:

$\lim_{x\to -1^-} g(x) = -1$
$\lim_{x\to -1^+} g(x) = 0$

Com que els dos límits laterals existeixen però no són iguals, $g(x)$ té una **discontinuïtat de salt** a $x = -1$.

$\lim_{x\to 1^-} g(x) = 0$
$\lim_{x\to 1^+} g(x) = -1/2$

Com que els dos límits laterals existeixen però no són iguals, $g(x)$ té una **discontinuïtat de salt** a $x = 1$.

(b)

$\boxed{\text{A.V.}}$

Per la periodicitat del cosinus, agafem dos representants dels punts candidats a asímptotes verticals del primer tram: $x = -3/2$ i $x = -5/2$:

$\lim_{x\to -3/2^-} g(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$
$\lim_{x\to -3/2^+} g(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$

$\lim_{x\to -5/2^-} g(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$
$\lim_{x\to -5/2^+} g(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$

$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \ln 0 = -\infty$
$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \ln 0 = -\infty$

Tenim doncs, asímptotes verticals a $x = \frac{1}{2} + k$, $\forall k \in \mathbb{Z}$ (amb $k \leq -2$) i a $x = 0$.

$\boxed{\text{A.H.}}$

$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x-1}{x+1} = +\infty$ (per grau de polinomis)
$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} \sec(\pi x) = \frac{1}{\cos\infty}$ i aquest límit no existeix.

Per tant, no hi ha asímptotes horitzontals.

$\boxed{\text{A.O.}}$

$m = \lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x-1}{x^2+x} = 1$ (per grau de polinomis)
$n = \lim_{x\to\infty} g(x) - x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x-1}{x+1} - 1 = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x-1-x^2-x}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{-2x-1}{x+1} = -2$ (per grau de polinomis)

$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sec(\pi x)}{x} = \frac{0}{\cos\infty}$ i aquest límit no existeix.

Per tant, només hi ha una asímptota obliqua a ∞ i és $y = x - 2$.

(c) Calculem la primera i segona derivades de $g(x)$:

$$g'(x) = \begin{cases} \pi\frac{\sin(\pi x)}{\cos^2(\pi x)} & x \le -1 \\ \frac{2}{x} & -1 < x < 1 \\ \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} & 1 \le x \end{cases} \qquad g''(x) = \begin{cases} \pi^2\frac{1+\sin^2(\pi x)}{\cos^3(\pi x)} & x \le -1 \\ -\frac{2}{x^2} & -1 < x < 1 \\ \frac{2}{(x+1)^3} & 1 \le x \end{cases}$$

Fixem-nos que $g'(x)$ és contínua a tots els punts on $g(x)$ és contínua e manera que $g(x)$ és derivable a tots els punts del seu domini.
Analitzant la segona derivada,

	$(-9/2,-7/2)$	$(-7/2,-5/2)$	$(-5/2,-3/2)$	$(-3/2,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
$\cdots$	$\cup$	$\cap$	$\cup$	$\cap$	$\cap$	$\cap$	$\cup$

(d) Per muntar la composició caldrà buscar $R(f) \cap D(g)$. Analitzem cada tram de $f(x)$ per separat:

T1) Quan $x \le -2$ es verifica $f(x) = x$ i per tant $R(f) = (-\infty, -2]$. Tots aquests punts són ≤ -1, per tant combinarem aquest tram amb el primer de g.

T2) Quan $-2 < x < 2$ es verifica $f(x) = 4x$ i per tant $R(f) = (-8, 8)$. Aquest interval queda a cavall dels tres trams de definició del domini de g. Per tant, l'haurem de partir en tres trossos:

1.- $(-8, -1]$: Els x corresponents estan entre -2 i $-1/4$ (ja que $4(-2) = -8$ i $4(-1/4) = -1$). Combinarem el segon tram de f amb el primer tram de g.
2.- $(-1, 1)$: Els x corresponents estan entre $-1/4$ i $1/4$. Combinarem el segon tram de f amb el segon tram de g.
3.- $[1, 8)$: Els x corresponents estan entre $1/4$ i 2. Combinarem el segon tram de f amb el tercer tram de g.

T3) Quan $x \ge 2$ es verifica $f(x) = e^x$, i per tant $R(f) = [e^2, \infty)$. Tots aquests punts són ≥ 1, per tant combinarem aquest tram amb el tercer de g.

$$(g\circ f)(x) = \begin{cases} \sec(\pi x) & x \le -2 \\ \sec(4\pi x) & -2 < x \le -1/4 \\ \ln(16x^2) & -1/4 < x < 1/4 \\ \frac{16x^2-4x-1}{4x+1} & 1/4 \le x < 2 \\ \frac{e^{2x}-e^x-1}{e^x+1} & x \ge 2 \end{cases}$$

Analitzem amb detall què passa als punts $x = -2$ i $x = 2$:

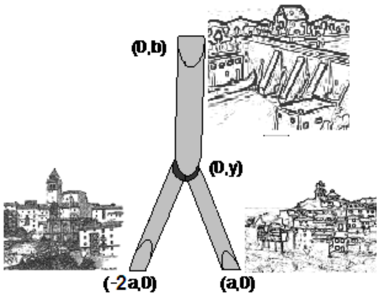
$\lim_{x\to-2^-}(g\circ f)(x) = 1$
$\lim_{x\to-2^+}(g\circ f)(x) = 1$

Com que els dos límits laterals existeixen i són iguals, $\lim_{x\to-2}(g\circ f)(x) = 1$. A més, $-2 \in D(g\circ f)$ i $(g\circ f)(-2) = 1$, de manera que $(g\circ f)$ és **contínua** a $x = -2$.

$\lim_{x\to2^-}(g\circ f)(x) = 55/9$
$\lim_{x\to2^+}(g\circ f)(x) = e^4/(e^2+1) - 1$

Com que els dos límits laterals existeixen però no són iguals, $(g\circ f)(x)$ té una **discontinuïtat de salt** a $x = 2$.

4. (1.5 punts) S'està construint la canalització d'aigua entre dos pobles i el pantà de Guiamets - Tivissa (Tarragona). El pantà està situat al punt $(0,b)$ i els pobles estan situats als punts $(-2a,0)$ i $(a,0)$. Tenint en compte que a partir de la bifurcació i fins als pobles, utilitzarem uns tubs de diàmetre D que costen 1M d'euros la unitat de distància, i abans de la bifurcació uns tubs de diàmetre B que costen 1,5M d'euros la unitat de distància, digues quant ha de valer el punt intermedi de connexió $(0,y)$ per tal que el cost dels tubs sigui mínim.



Anomenant L_D, L_B a les longituds del tubs de diàmetres D i B respectivament, la funció (en milions d'euros) que volem minimitzar és

$$C = 1 \cdot L_D + 1,5 \cdot L_B$$

Per calcular L_B i L_D calcularem les distàncies entre els punts indicats a l'enunciat:

$$L_D = d((0,y),(-2a,0)) + d((0,y),(a,0)) = \sqrt{4a^2+y^2} + \sqrt{a^2+y^2}$$
$$L_B = d((0,b),(0,y)) = b-y$$

De manera que

$$C = \sqrt{4a^2+y^2} + \sqrt{a^2+y^2} + \frac{3}{2}(b-y)$$

Derivant respecte d'y i igualant a 0,

$$C' = \frac{y}{\sqrt{4a^2+y^2}} + \frac{y}{\sqrt{a^2+y^2}} - \frac{3}{2} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{y}{\sqrt{4a^2+y^2}} + \frac{y}{\sqrt{a^2+y^2}} = \frac{3}{2} \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{a^2+y^2} + \sqrt{4a^2+y^2} = \frac{3\sqrt{4a^2+y^2}\sqrt{a^2+y^2}}{2y}$$

$$\Longrightarrow \quad a^2+y^2+2\sqrt{a^2+y^2}\sqrt{4a^2+y^2}+4a^2+y^2 = \frac{9(4a^2+y^2)(a^2+y^2)}{4y^2}$$

$$\Longrightarrow \quad 4a^2y^2+4y^4+8y^2\sqrt{4a^2+y^2}\sqrt{a^2+y^2}+16y^2a^2+4y^4 = 36a^4+45a^2y^2+9y^4$$

$$\Longrightarrow \quad 8y^2\sqrt{4a^2+y^2}\sqrt{a^2+y^2} = 36a^4+25a^2y^2+y^4$$

...

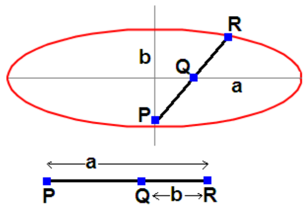
5. (1.5 punts) Mètode de la Targeta per dibuixar una el·lipse de semieixos a i b. Consisteix en marcar sobre una targeta els semieixos major i menor tal com indica la figura. Es col·loquen recolzats sobre els eixos coordenats, i el punt exterior és un punt de l'el·lipse. Si anem movent la targeta sobre els eixos deixant-la sempre recolzada anem dibuixant l'el·lipse.

(a) Troba l'equació de la recta que passa pels punts P i Q.

(b) Troba l'expressió general d'un punt R pertanyent a la recta.

(c) Escriu l'equació d'una el·lipse de semieixos $a = 3$ i $b = 2$ centrada a l'origen.

(d) Comprova que efectivament, R és un punt de l'el·lipse i per tant el mètode de la targeta funciona.



(a) Anomenant $P(0, \alpha)$ i $Q(\beta, 0)$, l'equació de la recta $y = mx + n$ que passa pels dos punts la trobem a partir de resoldre el següent sistema:

$$\begin{cases} \alpha = n \\ 0 = m\beta + n \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad y = -\frac{\alpha}{\beta}x + \alpha$$

A més, per Pitàgores, sabem que $\alpha^2 + \beta^2 = (a - b)^2$.

(b) Anomenant $R(x_0, y_0)$, sabem que aquest punt verifica l'equació de la recta anterior. A més, per proporcionalitat de triangles,

$$\frac{y_0}{y_0 - \alpha} = \frac{b}{a} \quad \Longrightarrow \quad y_0 = -\frac{\alpha b}{a - b}$$

$$\frac{x_0 - \beta}{x_0} = \frac{b}{a} \quad \Longrightarrow \quad x_0 = \frac{\beta a}{a - b}$$

Així, el punt R té per coordenades

$$\left(-\frac{\alpha b}{a - b}, \frac{\beta a}{a - b}\right)$$

on $\alpha^2 + \beta^2 = (a - b)^2$

(c) Directament,

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

(d) Comprovem que les coordenades de R, que en aquest cas són $(-3\alpha, 2\beta)$ verifiquen l'equació de l'el·lipse:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = \frac{9\alpha^2}{9} + \frac{4\beta^2}{4} = \alpha^2 + \beta^2$$

I com que sabem que $\alpha^2 + \beta^2 = (3 - 2)^2 = 1$ ja ho tenim demostrat.

6. (2 punts) Les roses tenen equació $r(\alpha) = \cos(k\alpha)$ per a un valor de k enter. Quan $k = 1/2$ la figura resultant es coneix com a Folium de Dürer.

(a) Calcula el període (el valor d'α a partir del qual la corba es repeteix).
(b) Determina si té simetries.
(c) Representa la corba.
(d) Calcula l'àrea total de la figura (sense comptar cap part dues vegades).

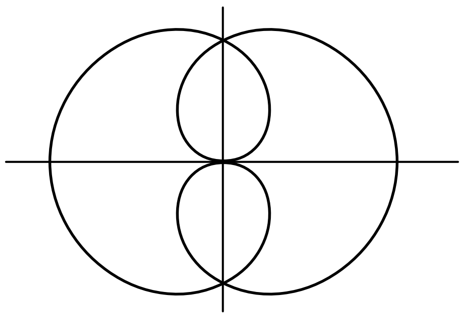
(a) Com que el període del cosinus és 2π, igualant, $\alpha/2 = 2\pi$ obtenim que $\alpha = 4\pi$ és el període de la corba. O dit d'una altra forma, per recórrer 2π (el període del cosinus) cal recórrer 4π amb aquesta corba.

(b) Comprovem-les:

$r(-\alpha) = \cos(-\frac{\alpha}{2}) = \cos(\frac{\alpha}{2}) = r(\alpha)$ (simetria respecte l'eix X).
$r(\pi-\alpha) = \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2})\cos(-\frac{\alpha}{2}) - \sin(\frac{\pi}{2})\sin(-\frac{\alpha}{2}) = \sin(\frac{\alpha}{2}) \neq r(\alpha)$
$r(\pi+\alpha) = \cos(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2})\cos(\frac{\alpha}{2}) - \sin(\frac{\pi}{2})\sin(\frac{\alpha}{2}) = -\sin(\frac{\alpha}{2}) \neq r(\alpha)$

(c) Donant uns quants valors i tenint en compte la simetria anterior,

α	r
0	1
60°	$\sqrt{3}/2$
90°	$\sqrt{2}/2$
120°	$1/2$
180°	0
240°	$-1/2$
270°	$-\sqrt{2}/2$
300°	$-\sqrt{3}/2$
360°	-1



(d) Pels valors que hem donat i per tal com és la corba, l'àrea interior la podem muntar integrant entre 0 i $\pi/2$ i multiplicant per 4:

$$A = 4\left(\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) d\alpha\right) = 2\int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos\alpha}{2} d\alpha = [\alpha + \sin\alpha]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} + 1 - 0 - 0 = 1 + \frac{\pi}{2}$$